第六节　方向导数与梯度

一、方向导数

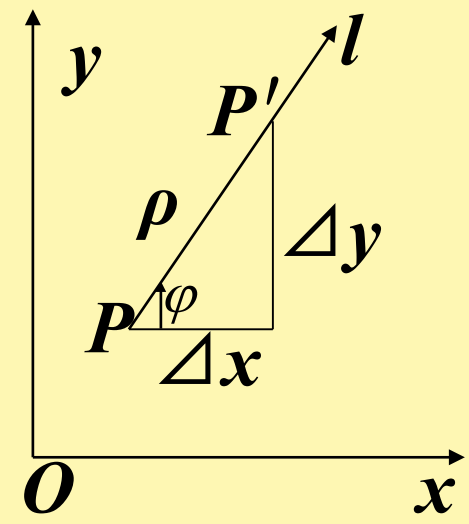
1　方向导数的定义

设函数$z=f(x, y)$在点$P(x, y)$的某一邻域$U(P)$内有定义，

射线l与x轴正向的转角为φ

$P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$为$l$上的另一点

$P' \in U(P)$

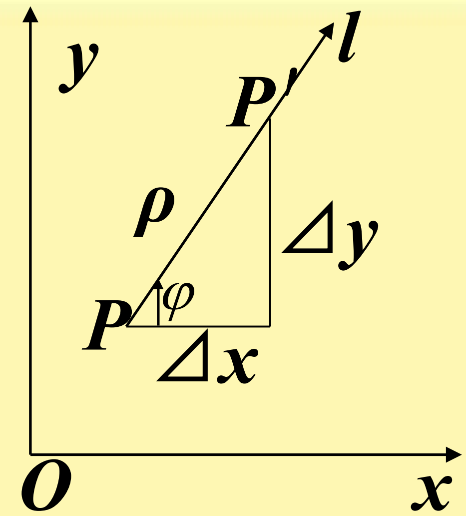


函数的增量$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)$

与P、P' 两点间的距离即

$$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$的比值，

当P' 沿着l趋于P时，比的极限存在，



则称这极限为**函数$f(x, y)$在点P沿方向l的方向导数**

记作$\dfrac{\partial f}{\partial l}$，即 $$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)-f(x,y)}{\rho}$$

$$=\lim_{P'\to P}\frac{f(P')-f(P)}{|PP'|}$$

2 方向导数与偏导数之间的关系

（1）当函数$f(x,y)$在点$P(x,y)$的偏导数 f_x 、f_y 存在时，

函数$f(x,y)$在点P沿着x轴正向$e_1=\{1,0\}$

的方向导数： $\cos\varphi=1,\sin\varphi=0,$

因为$$\frac{\partial f}{\partial e_1}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\rho\cos\varphi, y+\rho\sin\varphi)-f(x,y)}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\rho,y)-f(x,y)}{\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}$$

沿y轴正向$e_2=\{0,1\}$的方向导数： $\frac{\partial f}{\partial e_2}=\frac{\partial f}{\partial y}$

$f(x，y)$ 在点P沿x轴负向$e_1{}'$ ={－1， 0)的方向导数：

$$\cos\varphi=-1,\sin\varphi=0,$$

因为$$\frac{\partial f}{\partial e_1'}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\rho\cos\varphi,y+\rho\sin\varphi)-f(x,y)}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x-\rho,y)-f(x,y)}{\rho}=-\frac{\partial f}{\partial x}$$

y轴负向$e_2{}'$ ＝｛0，－1｝的方向导数：$\dfrac{\partial f}{\partial e_2'}=-\dfrac{\partial f}{\partial y}$

（2）即使沿任何方向的方向导数都存在，也不能保证 f_x 、f_y 存在

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点（0， 0）处

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(0+\rho\cos\varphi,0+\rho\sin\varphi)-f(0,0)}{\rho}$$

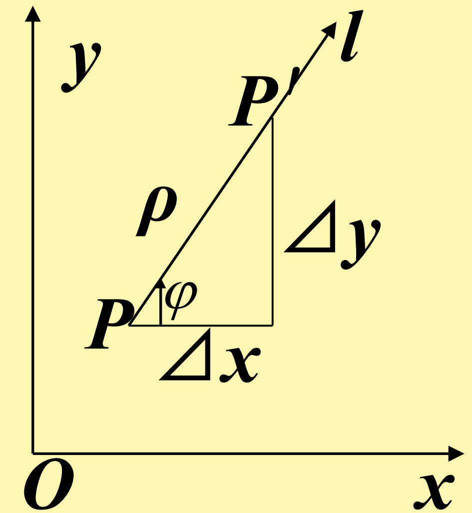
注意：$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}>0$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho}{\rho}=1$$

但 f_x（0， 0）、f_y（0， 0）不存在

3 方向导数的计算方法

定理 如果函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$是可微分的，那末函数在该点沿任意方向L的方向导数都存在，且有
$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi,$$
其中 φ 为x轴正向到方向L的转角.



设方向L的方向角为α,β

若φ为锐角：$\alpha=\varphi\quad \beta=\dfrac{\pi}{2}-\varphi$

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$$

$$=\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}\right\}\cdot\{\cos\alpha,\ \cos\beta\}$$ φ为其他情形也成立

证明 由于函数可微，则增量可表示为

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+o(\rho)$$

两边同除以ρ 得到

$$\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\underbrace{\frac{\Delta x}{\rho}}_{\cos\alpha}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\underbrace{\frac{\Delta y}{\rho}}_{\cos\beta}+\frac{o(\rho)}{\rho}$$

方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta.$$

例 1 求函数 $z = xe^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处沿从点 $P(1,0)$ 到点 $Q(2,-1)$ 的方向的方向导数.

解 这里方向 $\vec{l}$ 即为 $\overrightarrow{PQ} = \{1,-1\}$,

$$\text{所以} \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\because \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)} = \left.e^{2y}\right|_{(1,0)} = 1; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)} = \left.2xe^{2y}\right|_{(1,0)} = 2,$$

所求方向导数

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)} \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)} \cdot \cos\beta$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

推广可得三元函数方向导数的定义

对于三元函数$u=f(x,y,z)$，它在空间一点$P(x,y,z)$沿着方向 L 的方向导数，可定义为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{P'\to P}\frac{f(P')-f(P)}{|PP'|}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\rho},$$

（其中$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$）

设方向 L 的方向角为α,β,γ

$$\Delta x=\rho\cos\alpha,\quad \Delta y=\rho\cos\beta,\quad \Delta z=\rho\cos\gamma$$

推广可得三元函数方向导数的定义

对于三元函数$u=f(x,y,z)$，

当函数在空间一点$P(x,y,z)$可微时，那末函数在该点沿任意方向 L 的方向导数都存在

设方向 L 的方向角为α,β,γ

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

例 2　设$\vec{n}$是曲面$2x^2+3y^2+z^2=6$在点$P(1,1,1)$处的指向外侧的法向量，求函数

$u=\frac{1}{z}(6x^2+8y^2)^{\frac{1}{2}}$在此处沿方向$\vec{n}$的方向导数.

分析：$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_P=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\right|_P$

解　令 $F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-6$,

$\left.F'_x\right|_P=\left.4x\right|_P=4,\quad \left.F'_y\right|_P=\left.6y\right|_P=6,\quad \left.F'_z\right|_P=\left.2z\right|_P=2,$

故 $\vec{n}=\pm\left\{F'_x,F'_y,F'_z\right\}=\pm\{4,6,2\}$

指向外侧：$\vec{n}=\{4,6,2\}\quad |\vec{n}|=\sqrt{4^2+6^2+2^2}=2\sqrt{14},$

方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{14}},\ \cos\beta=\frac{3}{\sqrt{14}},\ \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{14}}.$

$$u=\frac{1}{z}(6x^2+8y^2)^{\frac{1}{2}}$$ 点P: (1,1,1)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P=\left.\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\frac{6}{\sqrt{14}};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P=\left.\frac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\frac{8}{\sqrt{14}};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P=-\left.\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2}\right|_P=-\sqrt{14}.$$

故 $$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_P=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\right|_P=\frac{11}{7}.$$

二、梯度（gradient）

1 梯度的定义

定义 设函数$z=f(x,y)$在区域D内具有一阶连续偏导数，则对每点$P(x,y)\in D$，都可定义一个向量

$\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$ 这个向量称为函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$的梯度，记作：

$$\operatorname{grad} f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}=\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\}$$

说明：(i) 梯度是一向量.

(ii) 对于三元函数 $f(x,y,z)$ 可类似地定义：

$$grad\ f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}=\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right\}$$

(iii)梯度也可记作

$$\mathrm{grad}\, f(P)=\nabla f(P)=\{f_x(P),\ f_y(P),\ f_z(P)\}$$

其中 $\nabla=\{\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\}$

称为向量微分算子或 Nabla算子或Hamilton算子.

类似微分算子：$D=\frac{d}{dt},Dy=\frac{dy}{dt},$

$$D^n=\frac{d^n}{dt^n},D^n y=\frac{d^n y}{dt^n}$$

2 梯度的性质 （与方向导数的关系）

设$\vec{e}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}$是方向$\vec{l}$上的单位向量，

由方向导数公式知

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta=\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\}\cdot\{\cos\alpha,\cos\beta\}$$

$$=grad f(x,y)\cdot\vec{e}=|grad f(x,y)|\cos\theta,$$

其中$\theta=(grad f(x,y)\hat{,}\vec{e})$

当 $\cos(grad f(x,y),\vec{e})=1$时， 沿梯度方向的

$\frac{\partial f}{\partial l}$有最大值. 且最大值为梯度的模 $|grad f(x,y)|$

当 $\cos(grad f(x,y),\vec{e})=-1$时， 与梯度方向相反

$\frac{\partial f}{\partial l}$有最小值. $-|grad f(x,y)|$

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta=\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\}\cdot\{\cos\alpha,\cos\beta\}$$

结论： 函数$z=f(x,y)$在某点$P(x,y)$处沿梯度方向的方向导数最大（函数增长最快），而它的最大值为梯度的模.

即： $$|\mathbf{grad}f(x,y)|=\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2}=\max\frac{\partial f}{\partial l}$$

经过与二元函数的情形完全类似的讨论可知，三元函数的梯度也是这样一个向量，它的方向与取得最大方向导数的方向一致，而它的模为方向导数的最大值。

例3 求函数$f(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$在点$M_0(1, -1, 2)$处方向导数的最大值，及M_0在取得方向导数最大值的方向与坐标轴夹角的余弦.

解: $$\operatorname{grad} f = \{2x, 2y, 2z\},$$

$$\operatorname{grad} f(1, -1, 2)=\{2, -2, 4\}$$

$$\max \frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(1,-1,2)} = \left|\operatorname{grad} f(1,-1,2)\right| = 2\sqrt{6},$$

$$l^{\circ} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right\}.$$

复习：曲面方程 $F(x,y,z)=0$

在点$(x_0,y_0,z_0,)$处的法向量：

$$\vec{n}=\pm\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}$$

比较：平面上的曲线方程 $F(x,y)=0$

在点(x_0,y_0)处的法向量：

在点(x_0,y_0)处切线的斜率：$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=-\dfrac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$

法线斜率：$\dfrac{F_y(x_0,y_0)}{F_x(x_0,y_0)}$ 法向量为 $\pm\{1,\dfrac{F_y(x_0,y_0)}{F_x(x_0,y_0)}\}$

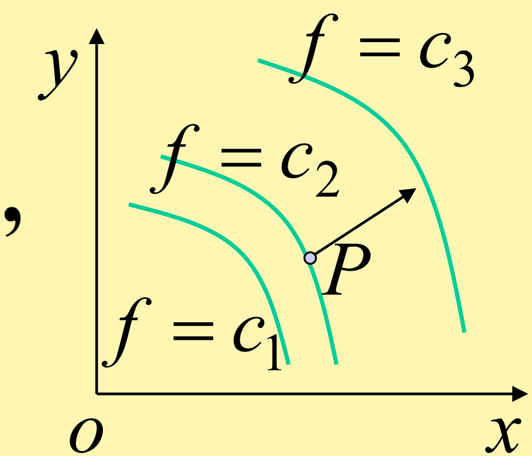
即：$\pm\{F_x(x_0,y_0),F_y(x_0,y_0)\}$， 切向量$\vec{T}=\pm\{F_y,-F_x\}$

3. 梯度的几何意义

对函数 $z=f(x,y)$，曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ z=C \end{cases}$ 在 xoy 面上的投影 $L^*: f(x,y)=C$ 称为函数 f 的等值线.

设 f_x, f_y 不同时为零， 则L*上点P处的法向量为

$$\pm\{f_x, f_y\} = \pm\, grad f\big|_P$$



(设 $c_1<c_2<c_3$)

同样，对应函数 $u=f(x,y,z)$，有等值面(等量面) $f(x,y,z)=C$，当各偏导数不同时为零时，其上点P处的法向量为 $\pm\, grad f\big|_P$

函数在一点的梯度垂直于该点等值面(或等值线)，指向函数增大的方向.

内容小结

1、理解方向导数与梯度的概念,并掌握其计算方法.

习题 7-6